10. Распределения случайных величин-3

10.1. Предварительные сведения

Если случайный вектор (ξ, η) имеет абсолютно непрерывное распределение, то его функция распределения и плотность связаны соотношением

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{\xi,\eta}(x,y)}{\partial x\,\partial y}.$$

Одномерные распределения случайных величин ξ и η имеют плотности

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy, \quad p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx.$$

Случайный вектор принимает значение в множестве B с вероятностью

$$\mathbb{P}((\xi,\eta) \in B) = \iint\limits_B p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy.$$

Если $B = [x_1, x_2) \times [y_1, y_2)$, то

$$\mathbb{P}((\xi,\eta) \in B) = F_{\xi,\eta}(x_2,y_2) - F_{\xi,\eta}(x_1,y_2) - F_{\xi,\eta}(x_2,y_1) + F_{\xi,\eta}(x_1,y_1).$$

Кроме этих формул используются сведения, применявшиеся на предыдущих занятиях.

10.2. Практическое занятие

1. Случайный вектор (ξ, η) имеет плотность $p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} A, & x^2+y^2 \le R^2, \\ 0, & x^2+y^2 > R^2. \end{cases}$ Найти значение постоянной A и одномерные плотности p_ξ и p_η. Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?

Ответ. $A = \frac{1}{\pi R^2}$; $p_\xi(x) = p_\eta(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & |x| \le R, \\ 0, & |x| > R; \end{cases}$ нет.

2. Случайный вектор (ξ, η) имеет абсолютно непрерывное распределение. Его функция распределения имеет вид:

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ или } y \le 0, \\ 1 - e^{-x^2} - e^{-2y} + e^{-x^2-2y}, & x > 0,\ y > 0. \end{cases}$$

Найти

а) совместную плотность распределения $p_{\xi,\eta}(x,y)$;

б) вероятности $\mathbb{P}(-2 \le \xi < 2,\ 1 \le \eta < 3)$, $\mathbb{P}(\xi \ge 0,\ \eta \ge 1)$, $\mathbb{P}(\xi < 1,\ \eta \ge 2)$;

в) функции распределения F_ξ и F_η.

Являются ли величины ξ и η независимыми?

Ответ. а) $p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ или } y \le 0, \\ 4xe^{-x^2-2y}, & x > 0,\ y > 0; \end{cases}$ б) $e^{-2} - 2e^{-6} + e^{-10}$, e^{-2}, $e^{-4} - e^{-5}$;

в) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-x^2}, & x > 0; \end{cases}$ $F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ 1 - e^{-2y}, & y > 0. \end{cases}$ Да.

3. Случайный вектор (ξ, η) имеет совместную функцию распределения

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2}(4 \operatorname{arctg} x \operatorname{arctg} y + 2\pi \operatorname{arctg} x + 2\pi \operatorname{arctg} y + \pi^2).$$

Доказать, что ξ и η — независимые случайные величины. Найти функции распределения F_ξ и F_η. Вычислить вероятности $\mathbb{P}(-1 \le \xi \le 1,\ 1 \le \eta \le \sqrt{3})$, $\mathbb{P}(\xi > 1,\ \eta > \sqrt{3})$.
Ответ. $F_\xi(x) = F_\eta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$; $1/24$, $1/24$.

10.3. Домашнее задание

4. Случайный вектор (ξ, η) имеет плотность $p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} Cxy^2, & x \in [0, 2],\ y \in [0, 1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ Найти

а) значение постоянной C;

б) одномерные плотности $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$;

в) функции распределения $F_\xi(x)$, $F_\eta(y)$, $F_{\xi,\eta}(x, y)$.

Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?

Ответ. а) $C = 3/2$; б) $p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0, 2], \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$ $p_\eta(y) = \begin{cases} 3y^2, & y \in [0, 1], \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$ в) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2; \end{cases}$
$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ y^3, & 0 < y \le 1, \\ 1, & y > 1; \end{cases}$ $F_{\xi,\eta}(x, y) = F_\xi(x) F_\eta(y)$. Да.

5. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η имеет вид:

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ или } y \le 0, \\ 3^{-x-y} \ln^2 3, & x > 0,\ y > 0. \end{cases}$$

Найти

а) функцию совместного распределения $F_{\xi,\eta}(x, y)$;

б) плотности распределений p_ξ и p_η случайных величин ξ и η;

в) $\mathbb{P}((\xi, \eta) \in B)$, где B — треугольник с вершинами в точках с координатами $(2, 1)$, $(2, 2)$ и $(5, 1)$.

Являются ли ξ и η независимыми?
Ответ. а) $F_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ или } y \le 0, \\ (1 - 3^{-x})(1 - 3^{-y}), & x > 0,\ y > 0; \end{cases}$ б) $p_\xi(x) = p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 3^{-x} \ln 3, & x > 0; \end{cases}$
в) $14/27^2 \approx 0.0192$. Да.
6. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η имеет вид $p_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{C}{(x^2+y^2+\pi)^2}$. Найти постоянную C и одномерные плотности p_ξ и p_η. Являются ли величины ξ и η независимыми?
Ответ. $C = 1$; $p_\xi(x) = p_\eta(x) = \frac{\pi}{2(x^2+\pi)^{3/2}}$; нет.
Указание. При вычислении C перейти к полярным координатам. При нахождении p_ξ положить $y^2 + \pi = a^2$ и сделать замену $x = a \operatorname{tg} t$.